Pretzel link の Hoste polynomial(グラフ理論と3次元多様体)

清, 裕恵

数理解析研究所講究録
575巻 1985年 156-164

Pretzel link の Hoste polynomial

東女大文理　清　裕恵（Hiroe Kiyoshi）

Hoste polynomial の定義

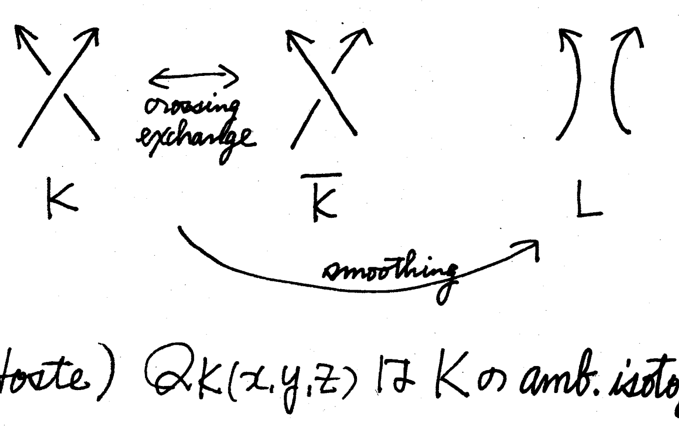
K を oriented knot または link とし、K の projection を1つ固定する。

$Q_K = Q_K(x, y, z)$ は Laurent polynomial で ①. ② を満たす。

① K が k-components trivial link なら $Q_K(x, y, z) = \left(\frac{x-y}{z}\right)^{k-1}$

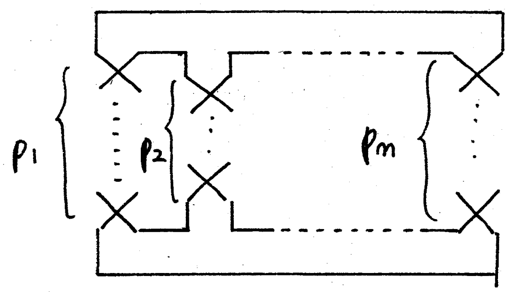
② $K, \bar{K}, L$ がある crossing point で図に従い、他の部分は一致しているなら

$$xQ_K - yQ_{\bar{K}} = zQ_L$$



定理（Hoste）$Q_K(x, y, z)$ は K の amb. isotopy invariant である。

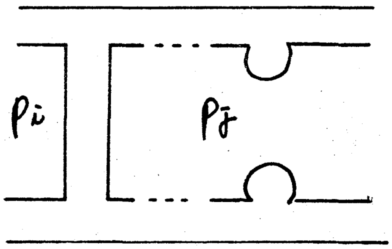
pretzel link $K(p_1, \cdots, p_n)$ $p_i \in \mathbb{Z} \cup \{-\}$ とは次に示す link である。



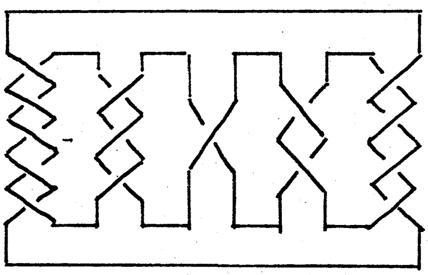
$|p_i|$: crossing の個数

$\begin{cases} p_i > 0 \text{ のとき right handed} \\ p_i < 0 \text{ のとき left handed} \end{cases}$

$p_i = 0$, $p_j = -$ の場合



例えば $K(-5, 3, 1, -2, 4)$ は

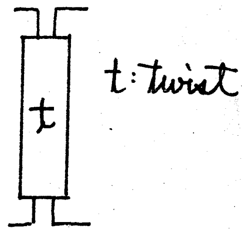


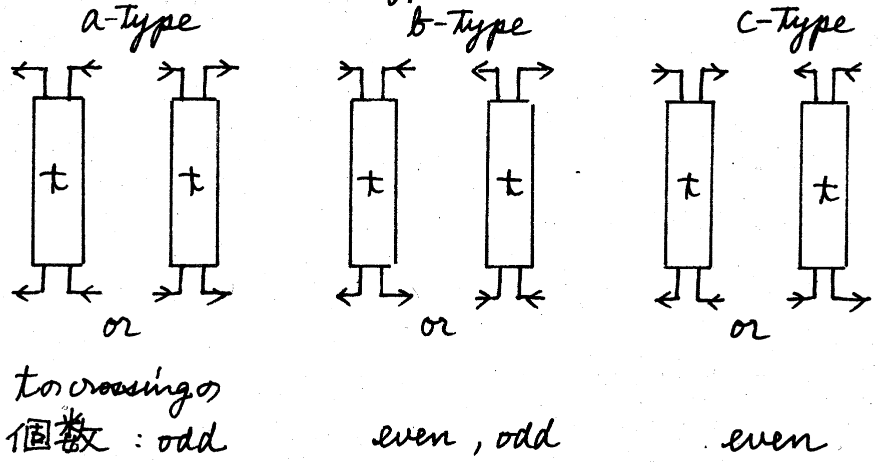
である。

さて、pretzel link の各 component に任意に向きを入れると、向きのついた twist を並列に並べたものとみることができる。したがって、逆に何本かの向きのついた twist を両端から出る矢印の向きを 隣りの twist の矢印の向きと矛盾なく合わせて並べることによって pretzel link を

構成することを考える。

1本のtwistは両端から出ている矢印に注目すると a, b, c type に限る。





これらを並列に並べてpretzel linkになるのは次の①②の場合である。

① a-typeばかり

② b-typeとc-typeの混合（ただしb-type twistの本数は偶数）

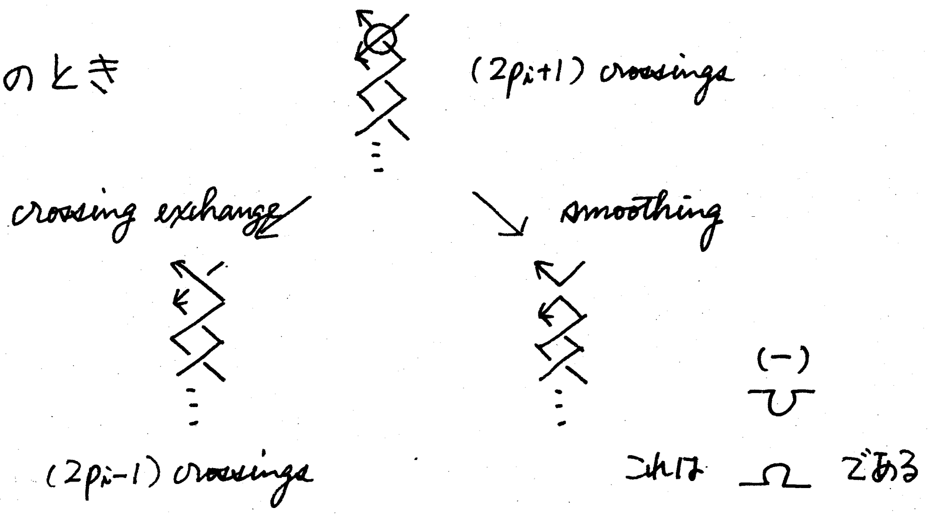
以下①,②の場合についてpolynomialを求める。

① $K(2p_1+1, 2p_2+1, \cdots\cdots, 2p_m+1)$ $p_i \in \mathbb{Z}$

定義に従ってcrossingの個数を減らして簡単な形にもっていく。

i番目のtwistにcrossing exchangeとsmoothingを行うと

$p_i>0$ のとき



したがって n 番目の twist に対しての resolution は

$$K(\underbrace{2p_1+1,\cdots\cdots,2p_{m-1}+1,}_{\sim\sim\sim}\ 2p_m+1)$$

$$\swarrow\frac{x}{y}\qquad\qquad\searrow -\frac{z}{y}$$

$$K(\sim\sim\sim, 2p_m-1)\qquad K(\sim\sim\sim, -)$$

$$\swarrow\frac{x}{y}\qquad\searrow -\frac{z}{y}$$

$$K(\sim\sim\sim, 2p_m-3)\qquad K(\sim\sim\sim, -)$$

$$\swarrow\qquad\searrow$$

$$\vdots\qquad K(\sim\sim\sim, -)$$

$$\swarrow$$

$$K(\sim\sim\sim, 3)$$

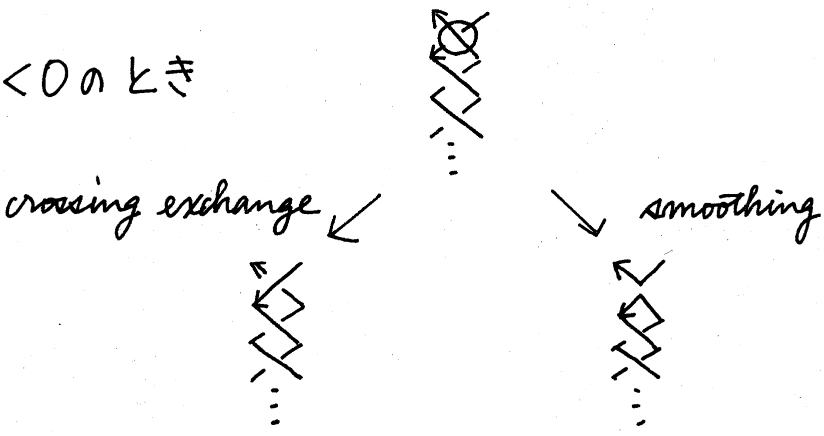
$$\swarrow\qquad\searrow$$

$$K(\sim\sim\sim, 1)\qquad K(\sim\sim\sim, -)$$

ゆえに

$$
\begin{aligned}
&QK(2p_1+1,\cdots,2p_{m-1}+1,2p_m+1)\\
&=\left(\frac{x}{y}\right)^{p_m}QK(\sim\sim\sim,1)\\
&\qquad+\left\{\left(-\frac{z}{y}\right)+\left(-\frac{z}{y}\right)\left(\frac{x}{y}\right)+\left(-\frac{z}{y}\right)\left(\frac{x}{y}\right)^2+\cdots+\left(-\frac{z}{y}\right)\left(\frac{x}{y}\right)^{p_m-1}\right\}QK(\sim,-)\\
&=\left(\frac{x}{y}\right)^{p_m}QK(\sim\sim\sim,1)-\frac{z}{y}\,\frac{1-\left(\frac{x}{y}\right)^{p_m}}{1-\frac{x}{y}}\,QK(\sim\sim\sim,-)\quad\leftarrow(*)
\end{aligned}
$$

$p_i < 0$ のとき



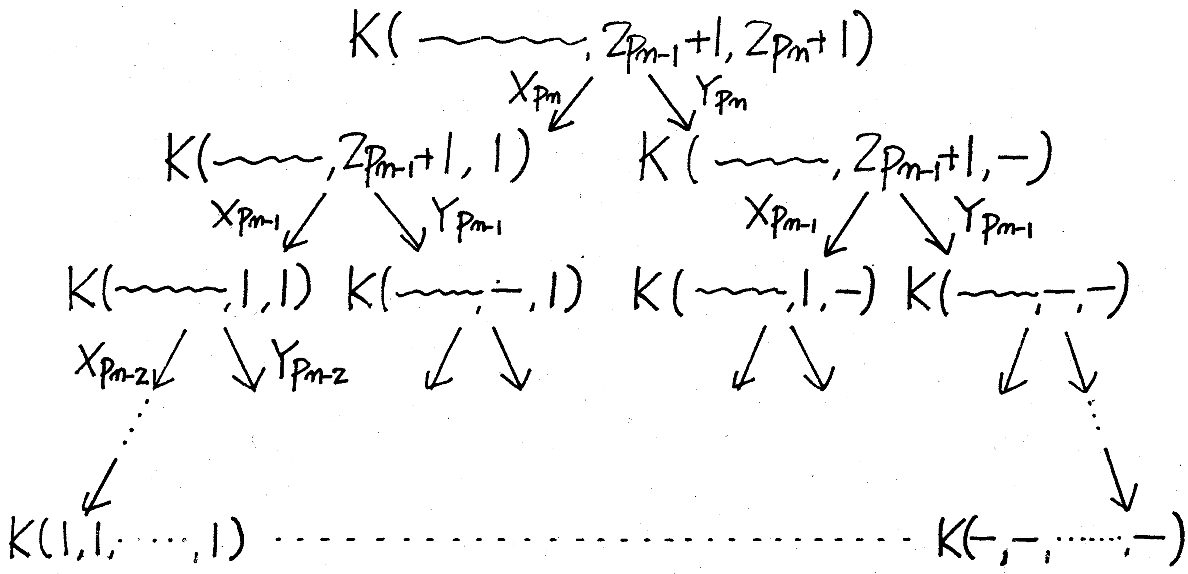
したがって

$$\begin{tikzcd}[column sep=small]
 & & & K(\underset{\sim\sim\sim}{2p_1+1,\cdots\cdots,2p_{n-1}+1},\ 2p_n+1) \arrow[dl, "\frac{y}{x}"'] \arrow[dr, "\frac{z}{x}"] & \\
 & & K(\sim\sim\sim,\ 2p_n+3) \arrow[dl, "\frac{y}{x}"'] \arrow[dr, "\frac{z}{x}"] & & K(\sim\sim\sim,\ -) \\
 & K(\sim\sim\sim,\ 2p_n+5) \arrow[d, dotted] \arrow[dr] & & K(\sim\sim\sim,\ -) & \\
 & K(\sim\sim\sim,\ -1) \arrow[dl] \arrow[d] & K(\sim\sim\sim,\ -) & & \\
K(\sim\sim\sim,\ 1) & K(\sim\sim\sim,\ -) & & &
\end{tikzcd}$$

$$QK(2p_1+1,\cdots\cdots,2p_{n-1}+1,2p_n+1)$$
$$=\left(\frac{y}{x}\right)^{-p_n} QK(\sim\sim\sim,1)$$
$$\quad+\left\{\frac{z}{x}+\frac{z}{x}\cdot\frac{y}{x}+\frac{z}{x}\left(\frac{y}{x}\right)^2+\cdots+\frac{z}{x}\left(\frac{y}{x}\right)^{-p_n-1}\right\}QK(\sim\sim,-)$$
$$=\left(\frac{y}{x}\right)^{-p_n} QK(\sim\sim\sim,1)+\frac{z}{x}\,\frac{1-\left(\frac{y}{x}\right)^{-p_n}}{1-\frac{y}{x}}\,QK(\sim\sim\sim,-)$$
$$=\left(\frac{x}{y}\right)^{p_n} QK(\sim\sim\sim,1)-\frac{z}{y}\,\frac{1-\left(\frac{x}{y}\right)^{p_n}}{1-\frac{x}{y}}\,QK(\sim\sim\sim,-)$$

これは(*)と同じ式である。

$X_{p_i} = (\frac{x}{y})^{p_i}$, $Y_{p_i} = -\frac{z}{y}\cdot\frac{1-(\frac{x}{y})^{p_i}}{1-\frac{x}{y}}$ とおくと



したがって

$QK(2p_1+1, 2p_2+1, \cdots\cdots, 2p_n+1)$

$= X_{p_1}X_{p_2}\cdots X_{p_n}QK(1,1,\cdots\cdots,1) + \cdots\cdots\cdots$

$\quad + Y_{p_1}Y_{p_2}\cdots\cdots Y_{p_n}QK(-,-,\cdots\cdots,-)$

ここで、1と−からなる列 $k_1,\cdots,k_n$ すべてにわたって

$Z_{p_1}Z_{p_2}\cdots Z_{p_n}QK(k_1,k_2,\cdots,k_n)$ の和をとる。

ただし、$k_i=1$ のとき　$Z_{p_i}=X_{p_i}$,

　　　　$k_i=-$ のとき　$Z_{p_i}=Y_{p_i}$

である。

　初期値 $QK(k_1,k_2,\cdots,k_n)$ $k_i=1$ または −

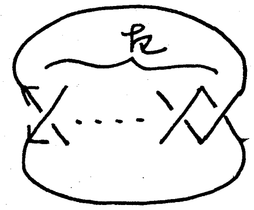
は、$K(k_1,k_2,\cdots,k_n)$ が図に示す link となるので、

これを L(k) とすれば

L(k)の polynomial は induction で

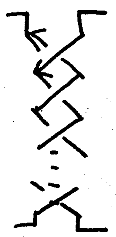
$$Q_{L(k)} = \frac{x}{y} Q_{L(k-2)} - \frac{z}{y} Q_{L(k-1)}$$

$$Q_{L(0)} = \frac{x-y}{z}, \quad Q_{L(1)} = 1$$



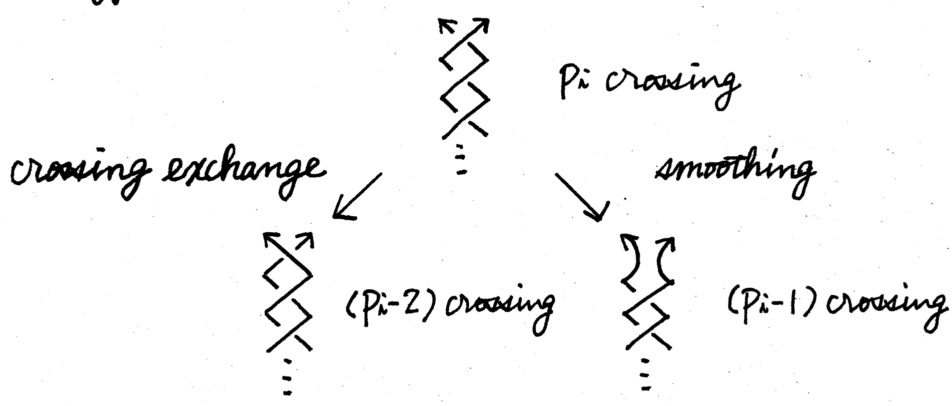
k: 1の個数

② $K(\underbrace{p_1, \cdots, p_{2m}}_{b\text{-type}}, \underbrace{2q_1, \cdots, 2q_m}_{c\text{-type}})$



C-type twist の形は右図のようになってい るので、a-type と同じ形の resolution となるが crossing の個数が偶数なので、初期値は 0 と −の列となる

b-type twist で $p_i > 0$ のとき



i番目の b-type twist の resolution は

$$\begin{tikzcd}[column sep=small] & K(\sim\sim, p_i, \sim\sim) \arrow[dl, "\frac{y}{x}"'] \arrow[dr, "\frac{z}{x}"] & \\ K(\sim\sim, p_i-2, \sim\sim) & & K(\sim\sim, p_i-1, \sim\sim) \end{tikzcd}$$

となり、3項漸化式となって初期値は 1 と 0 の列になる。

したがって

$$
\begin{aligned}
&QK(\sim\sim, p_i, \sim\sim) \\
&= \frac{z}{x} QK(\sim\sim, p_i - 1, \sim\sim) + \frac{y}{x} QK(\sim\sim, p_i - 2, \sim\sim) \\
&= \frac{\left(\frac{z+\sqrt{D}}{2x}\right)^{p_i} - \left(\frac{z-\sqrt{D}}{2x}\right)^{p_i}}{\frac{\sqrt{D}}{x}} QK(\sim\sim, 1, \sim\sim) + \frac{\frac{y}{x}\left\{\left(\frac{z+\sqrt{D}}{2x}\right)^{p_i-1} - \left(\frac{z-\sqrt{D}}{2x}\right)^{p_i-1}\right\}}{\frac{\sqrt{D}}{x}} \\
&\qquad \times QK(\sim\sim, 0, \sim\sim)
\end{aligned}
$$

ただし $D = z^2 + 4xy$

上式は a-type の時と同様に $p_i < 0$ の時も成り立つ。

ここで $U_{p_i} = \dfrac{\left(\frac{z+\sqrt{D}}{2x}\right)^{p_i} - \left(\frac{z-\sqrt{D}}{2x}\right)^{p_i}}{\frac{\sqrt{D}}{x}}$ $\quad V_{p_i} = \dfrac{\frac{y}{x}\left\{\left(\frac{z+\sqrt{D}}{2x}\right)^{p_i-1} - \left(\frac{z-\sqrt{D}}{2x}\right)^{p_i-1}\right\}}{\frac{\sqrt{D}}{x}}$

とおくと

$$
\begin{aligned}
&QK(p_1, \cdots, p_{2n}, 2q_1, \cdots, 2q_m) \\
&= U_{p_1} \cdots U_{p_{2m}} X_{q_1} \cdots X_{q_m} QK(1, \cdots, 1, 0, \cdots 0) + \cdots \\
&\quad + V_{p_1} \cdots V_{p_{2m}} Y_{q_1} \cdots Y_{q_m} QK(0, \cdots, 0, -, \cdots, -)
\end{aligned}
$$

ここで、1と0からなる列 $k_1, \cdots\cdots, k_{2n}$,

0と−からなる列 $k_1', \cdots, k_m'$ すべてにわたって

$Z_{p_1} \cdots Z_{p_{2m}} Z_{q_1} \cdots Z_{q_m} QK(k_1, \cdots, k_{2n}, k_1' \cdots, k_m')$

の和をとる。ただし

$k_i = 1$ のとき $Z_{p_i} = U_{p_i}$, $k_i = 0$ のとき $Z_{p_i} = V_{p_i}$

$k_i' = 0$ のとき $Z_{p_i} = X_{p_i}$, $k_i' = -$ のとき $Z_{p_i} = Y_{p_i}$

である。

初期値は $QK(k_1,\cdots,k_{2n},k_1',\cdots,k_m')$

$k_i=0$ または 1 , $k_i'=0$ または ∞

で、列 $k_1,\cdots,k_{2n},k_1',\cdots,k_m'$ に 0 を含めば

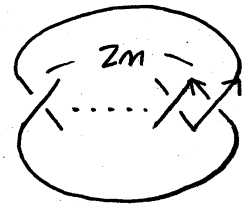
$K(k_1,\cdots,k_{2n},k_1',\cdots,k_m')$ は trivial link となる。

したがってその時

$QK(k_1,\cdots,k_{2n},k_1',\cdots,k_m') = \left(\frac{x-y}{z}\right)^{k-1}$ 　k は 0 の個数

0 を含まない時は 　$K(1,\cdots,1,-,\cdots,-)$

であり、この polynomial は



$$Q_{L(2n)} = \frac{y}{x}Q_{L(2n-2)} + \frac{z}{x}$$

$$Q_{L(2)} = \frac{y(x-y)+z^2}{xz}$$

を満たす。